Písemka č. 5 – ZS 5
14. 5. 2018

① $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n+a)^2}{(n-1)(3-5n)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+a)^2}{(n-1)(3-5n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{a}{n}\right)^2}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}-5\right)} = \frac{2^2}{-5} = -\frac{4}{5} \neq 0$$

$\Rightarrow$ nutná podmínka konvergence není splněna pro žádné $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ zadaná řada diverguje pro $\forall a \in \mathbb{R}$

② $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{\ }-\sqrt{\ })\cdot\frac{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}}_{=:a_n} \quad \dots \text{ řada s kladnými členy } ✓$$

$\Rightarrow$ můžeme srovnávat s $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L := \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} = \left|\begin{array}{l}\text{chceme vlastní číslo} \neq 0,\\ \text{tj. } L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{volba:}\\ \alpha = 1\end{array}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{\ }+\sqrt{\ })} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \begin{array}{l}\in \mathbb{R}\\ \neq 0\end{array} \Big\}\text{ tj. v SK je } \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow$ srovnávaná řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow$ diverguje i původní řada

③ $$\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}}_{=:a_n}, \text{ kde } p \in \mathbb{R}\setminus\{\tfrac{3}{2}\}$$ • kladné členy ✓

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{e^n}\cdot e}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^p}\cdot\frac{n^n\cdot n^p}{\cancel{n!}\,\cancel{e^n}} = e\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$$

• podílové kr.:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} e\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n\left[\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^p = e\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}\cdot 1 = e\cdot e^{-1} = 1$$

$\Rightarrow$ nelze rozhodnout

• Raabe:

$$L := \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^p e\right) = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right| \overset{\%}{=}$$

$$\overset{\%}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Heine}\\ \text{posl}}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{1-e(1+x)^{-\frac{1}{x}-p}}{x} = \left|\frac{0}{0} \Rightarrow l'H\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to0^+} (-e)\cdot\left[e^{(-\frac{1}{x}-p)\cdot\ln(1+x)}\right]' =$$

$$= -e\lim_{x\to0^+} (1+x)^{-\frac{1}{x}-p}\cdot\left[-(-1)x^{-2}\cdot\ln(1+x) + \left(-\frac{1}{x}-p\right)\cdot\frac{1}{1+x}\right] \overset{VOAL}{=}$$

$$= -e\cdot \underbrace{\lim_{x\to0^+} (1+x)^{-\frac{1}{x}-p}}_{\xrightarrow{x\to0^+}\frac{1}{e}\cdot 1} \cdot \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{px+1}{(1+x)\cdot x}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{x(px+1)-\ln(1+x)\cdot(1+x)}{x^2(1+x)} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1\cdot(px+1)+x\cdot p - \frac{1}{1+x}\cdot(1+x) - \ln(1+x)\cdot 1}{2x(1+x)+x^2\cdot 1} = \lim_{x\to0^+} \frac{2px + 1 - 1 - \ln(1+x)}{2x+3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{2px - \ln(1+x)}{x(2+3x)} \overset{VOAL}{=} \underbrace{\lim_{x\to0^+} \frac{2p}{2+3x}}_{\frac{2p}{2}} - \underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2+3x}}_{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{p-\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ dle Raabeho: • pokud $L>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ K

tj. pro $p-\frac{1}{2}>1$, tj. $p>\frac{3}{2}$ ř. $\sum a_n$ K (kladné členy, takže KA)

• pokud $L<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ D

tj. pro $p<\frac{3}{2}$ ř. $\sum a_n$ D

$\Rightarrow$ postup pro $p=\frac{3}{2}$: Gaussovo kritérium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda - \frac{\mu}{n} - \frac{c_n}{n^{1+\alpha}}$, $(\forall n\in\mathbb{N})$

kde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$; $\alpha\in\mathbb{R}^+$, (c_n) je omezená posl.

$\Rightarrow$ vzhledem k výpočtům výše: $\lambda=1$, $\mu=p-\frac{1}{2}$, takže by už jen stačilo najít $\alpha\in\mathbb{R}^+$ a omezenou (c_n) $\Rightarrow$ Gauss by pak rozhodl i pro $\mu=1$, a to že řada D

$\Rightarrow$ závěr ř. K (KA) pro $\underline{p>\frac{3}{2}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{n^{1405}}_{=b_n}}$

- střídavá znaménka ✓
- nutná podm. ✓
- abs. konv.: $\displaystyle\sum_{n=1} \underbrace{\frac{1}{n^{1405}}}_{=b_n}$ ... dle referenční řady (integrální kr.) konverguje $(1405 > 1)$

$\Rightarrow$ dle věty: pokud $\sum |a_n|$ K $\Rightarrow$ $\sum a_n$ K souhlasně, že $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1405}}$ KA

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n!}}{3^n} \underset{\uparrow}{=} \frac{(-1)^{0!=1}}{3^0} + \frac{(-1)^{1!}}{3^1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\overbrace{(-1)^{n!}}^{=1}}{3^n} = -1 - \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

n! je pro n ≥ 2 sudý

$$= -\frac{4}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{9_3} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-8+1}{6} = \underline{\underline{-\frac{7}{6}}}$$