Písemka č. 4 — 1 —

ZS 5, 8.5. 2018

① $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx = \left| \begin{matrix} 2 \text{ kr. body:} \\ \pm\infty \end{matrix} \right| = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^3\,dx}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} x^3\,dx}_{=: I_2}$

$I_1 = \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-\infty}^{0} = 0 - \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} = 0 - (+\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$ ... diverguje

$\Rightarrow$ I také diverguje

② $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg}(x)}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{subst.:} \quad \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow \frac{1}{t} = x \\ (-1)\cdot x^{-2}\,dx = dt \\ dx = -\frac{1}{t^2}\,dt \\ x_1 = 0 \to t_1 = +\infty;\ x_2 = +\infty \to t_2 = 0 \end{matrix} \right| =$

$= -\int_{+\infty}^{0} \frac{\sin(t)\,\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}{\cancel{\frac{1}{t}}} \frac{dt}{t^{\cancel{2}}} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt$

③ $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt = \underbrace{\int_{0}^{1} \ldots}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} \ldots}_{=: I_2}$ tip: bude konvergovat

- nezáporná x
- kr. body: $0, +\infty$

$\boxed{I_1:}$ $\int_{0}^{1} \underbrace{\frac{\sin t}{t} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}_{=: f(t)} dt$

- nezáporná ✓
- kr. bod: 0 (již jen jeden ✓)
- můžeme srovnávat s $g(t) = 1$

$\lim_{t\to 0+} \frac{f(t)}{g(t)} \overset{\text{VOAL}}{=} \underbrace{\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \begin{matrix} \in \mathbb{R} \\ \neq 0 \end{matrix} \Big\}$ so SK: ($\Leftarrow$), tj.

$\underbrace{\int g}\ K \Leftarrow \int f\ K$

$\int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = \underline{\underline{1\ K}}$ ✓

$\boxed{\Rightarrow I_1 \text{ konverguje}}$

$\boxed{I_2}$: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt$

- nezáporná ✗
- kr. bod: $+\infty$ (již jen jeden ✓)
- Abelovo kr.: $f(t) = \frac{\sin t}{t}$; $g(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)$
  - předp.:
    - f, g spojité na $\langle 1; +\infty)$ $\Rightarrow$ integr. na $\langle 1; +\infty)$
    - g je ostře klesající na $\langle 1; +\infty)$ ✓
    - g je omezená, protože $(\forall t \in \mathbb{R}) |\operatorname{arctg}(\frac{1}{t})| \leq \frac{\pi}{2}$ ✓
    - $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \ldots K$ ✓ (využití nápovědy)

$\boxed{\Rightarrow I_2 \text{ dle Abela konverguje}}$

$\boxed{\Rightarrow I \text{ také konverguje}}$

(4) $J := \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) dt = \underbrace{\int_0^1 \ldots}_{=: J_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \ldots}_{J_2}$

- kr. body: $0, +\infty$

$\boxed{J_1}$: i bez absolutní hodnoty to už byla nezáporná fce $\Rightarrow$ konverguje dle předchozího příkladu

$\boxed{J_2}$: $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{|\sin t|}{t} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}_{=: f(t)} dt$

- nezáporná ✓
- kr. bod: $+\infty$ (již jen jeden ✓)
- tip: bude konvergovat ($\frac{1}{t} \cdot \operatorname{arctg}(\frac{1}{t})$ umlátí $|\sin t|$)
- srovnáme s $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

$$L = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to +\infty} t^{\alpha - 1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot |\sin t| = \begin{cases} ? & \ldots\ \alpha - 1 > 0 \\ 0 & \ldots\ \alpha - 1 = 0 \\ 0 & \ldots\ \alpha - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha-1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) \overset{\text{VOSF}}{=} \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \operatorname{arctg}(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t^{\alpha-1}} \overset{\alpha - 1 > 0}{\underset{\text{L'H}}{=}}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{(\alpha-1) \cdot t^{\alpha-2}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1+t^2}}_{=1} \cdot \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{\alpha-2}} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{\alpha-2}} = \begin{cases} 0 & \overbrace{-(\alpha-2) > 0}^{\alpha < 2,\ \alpha + 2 > 0} \\ 1 & -(\alpha-2) = 0 \\ +\infty & -(\alpha-2) < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ pro $\overbrace{\alpha > 1 \wedge \alpha < 2}^{\alpha \in (1;2)}$: $\quad ? = \lim_{t \to +\infty} \underbrace{t^{\alpha-1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{k nule}} \cdot \underbrace{|\sin t|}_{\text{omezená}} = 0 \in \mathbb{R}$

(pro $\alpha \geq 2$ L vyřešeno nemáme, ale to nevadí, protože již teď můžeme rozhodnout)

SK: $\int_1^{+\infty} g\ K \Rightarrow \int_1^{+\infty} f\ K$

$\int_1^{+\infty} g\ K$ pro $\alpha \in (1;2)$ ✓ $\Rightarrow \overbrace{\int_1^{+\infty} f}^{= J_2}$ konverguje $\Big\} \Rightarrow J$ konverguje $\Big\} \Rightarrow$ původní integrál konverguje absolutně